**Geometria nello spazio**

1. Un vettore geometrico è una classe di segmenti orientati, ovvero dati due punti A e B è il segmento che ha come estremo iniziale A e come estremo finale B. Esso si rappresenta con una freccia dritta che va da A a B

Dati v e w vettori geometrici, in modo tale che l’estremo finale di v coincida con l’estremo iniziale di w, la loro somma è data dal vettore che ha come estremo iniziale l’estremo iniziale di v e come estremo finale l’estremo finale di w.

Proprietà:

* Proprietà **commutativa**: v + w = w + v
* Proprietà **associativa**: (v+w) + u = (u+w) + v
* **Elemento neutro** 🡪 esistenza del vettore nullo: v + 0 = v
* **Esistenza degli opposti** 🡪 v + (-v) = 0 (vettore nullo)

1. Dato un vettore v 0 ed uno scalare λ 0 il loro prodotto avrà:

* Direzione: stessa direzione di v
* Verso: concorde se λ > 0, discorde se λ < 0
* Modulo: |v| |λ|

Altrimenti se v = 0 e λ = 0 il loro prodotto sarà 0 (vettore nullo)

1. Dati due vettori geometrici v e w posti in modo tale che i loro estremi iniziali coincidano, e sia l’angolo formato dai due vettori. Allora il loro prodotto è dato dallo **scalare**: |v| |w| cos()

Utilizzando le coordinate possiamo riscrivere i due vettori v e w come proiezione di sé stessi sui 3 assi ottenendo così:

v = (v1,v2,v3) e w = (w1,w2,w3) il loro prodotto sarà uno scalare dato da:

1. Normalizzare un vettore significa renderlo un versore, ovvero un vettore di modulo 1, perciò dato v 0

il vettore geometrico seguente è normalizzazione di v:

Se si conoscono le coordinate del vettore, perciò avremo v = (v1,v2,v3), la sua normalizzazione è dalla seguente

formula: 🡪 (norma di v)

1. La proiezione ortogonale di un vettore v 0 su un versore e, sarà un vettore geometrico dato da:

(come risultato avremo uno scalare per un versore)

Analogamente la proiezione di un vettore v 0 su un vettore w 0, sarà un vettore geometrico ottenuto allo stesso modo di prima, infatti proprio per questo motivo è necessario trattare w come un versore andando a normalizzarlo:

1. Data una retta r, l’insieme dei piani che contengono r è detto fascio di piani di sostegno r, ed è descritto come segue:

Data una retta r descritta dalle seguenti equazioni cartesiane

Il fascio di piani è descritto dall’equazione: con scalari e per ogni coppia di otteniamo l’equazione cartesiana di un piano contenente

Un esempio del suo utilizzo per esempio potrebbe essere che ci viene chiesto di trovare un piano che contenga una

determinata retta e passante per un punto P

1. I vettori possono essere descritti in coordinate come segue:

Verifichiamo ora che utilizzando il prodotto scalare otteniamo:

Il risultato che abbiamo ottenuto è lo stesso perciò abbiamo verificato la proprietà.

1. Le posizioni reciproche di due rette nello spazio sono 3:
   1. Parallele
   2. Incidenti o Incidenti e Ortogonali
   3. Sghembe o Sghembe e Ortogonali

**Esercizi**

Equazione parametrica retta:

Equazione cartesiana retta: Ricavo nell’equazione parametrica e poi la sostituisco es:

Trovare il vettore direzionale retta:

1. Se conosco il punto A ed il punto B 🡪
2. Se conosco l’equazione parametrica 🡪
3. Se conosco l’equazione cartesiana 🡪 mi devo ricondurre all’equazione parametrica risolvendo il sistema e poi sostituendo con la variabile trovata

Posizione reciproca rette:

* Parallele: vettori direzionali hanno la stessa direzione (se sono proporzionali)
* Incidenti: se le due rette hanno un punto in comune
  + Per vedere se hanno punti in comune eguagliamo le equazioni parametriche (utilizzando due parametri differenti es: t e s)
* Sghembe: se non sono n’è parallele n’è incidenti

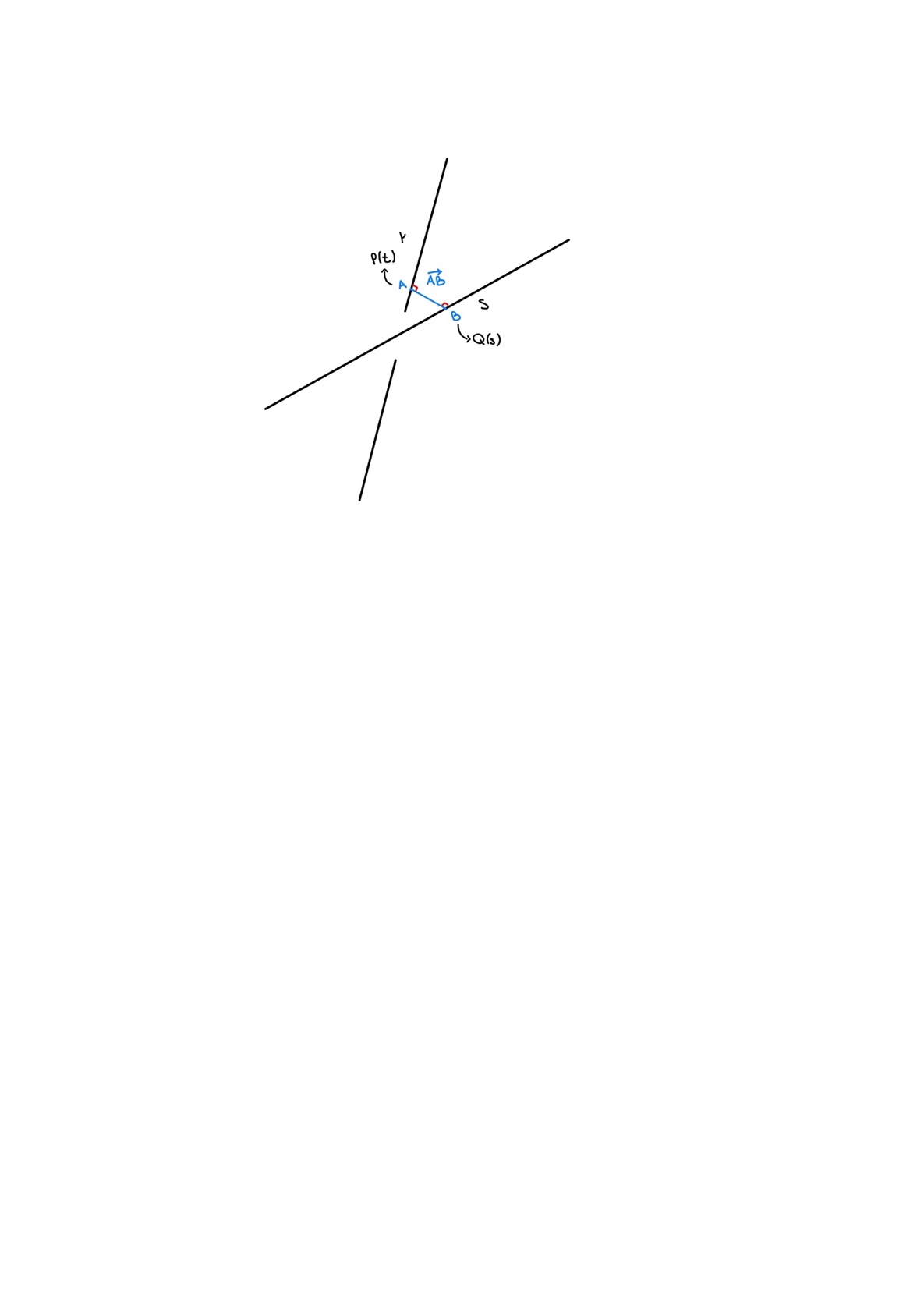
Se le due rette sono incidenti o sghembe potrebbero essere anche ortogonali se:

Distanza punto-punto:

Distanza punto-retta: Per trovare la distanza da un punto P ad una retta r dobbiamo trovare il vettore geometrico che sia ortogonale a , a quel punto

1. Troviamo il vettore direzionale con punto generico della retta r ricavato dall’equazione parametrica
2. Imponiamo la condizione di ortogonalità tra e sostituiamo il valore di trovato in

Distanza retta-retta:

* Rappresenta la minima distanza tra le due rette, per calcolarla vogliamo trovare due punti t.c. , la retta formata dai punti che collega le due rette deve ovviamente essere ortogonale ad esse.

1. Rette incidenti: la distanza è zero
2. Rette Parallele: si calcola la distanza punto-retta
3. Rette sghembe: In questo caso dobbiamo prendere due punti generici dati dalle eq. Parametriche

trovare il vettore direzionale di questi due punti, ed imporre la condizione di ortogonalità per entrambe le rette tramite un sistema a due equazioni a due variabili (), quindi si risolve e si trovano i valori di , a questo punto basta sostituire i valori in e calcolare la distanza tra questi due punti.

1. Troviamo il vettore direzionale
2. Imponiamo la condizione di ortogonalità: e sostituiamo il valore di trovato in

NB: non è vero che se sono ortogonali non va posta la condizione di ortogonalità, perché devo ottenere:

Equazione Parametrica di un piano:

* Come trovarla?

1. Mi ricavo una delle variabili per esempio x:
2. Siccome ho due parametri impongo che sia e sia
3. Ottengo un sistema della forma:

Rette Complanari: Per esserlo devono essere incidenti o parallele siccome devono giacere sullo stesso piano

* + - Trovare equazione del piano che le contiene:

1. Incidenti:
2. Basta prendere i vettori direzionali delle due rette: ed il punto di incidenza in modo tale che appartenga ad entrambe le rette e sostituire i valori nell’equazione parametrica di un piano
3. Parallele:
4. Prendo il vettore direttore di una delle due rette, ed un punto A sulla prima retta ed un punto B sulla seconda retta e trovo il vettore direttore che passa per questi due punti e sostituisco i valori nell’equazione parametrica del piano

* NB: Se due rette sono complanari per trovare l’equazione del piano che le contiene posso anche calcolare il fascio di piani con le equazioni cartesiane di una retta ed un punto a caso di una delle due rette perché tanto sono complanari per forza

Equazione cartesiana del piano:

* Conoscendo un punto ed

1. Trovo il piano perpendicolare ad
2. Impongo il passaggio per per trovare
3. Riscrivo l’equazione del piano come al punto 1 ma con il valore di trovato al punto 2

* Conoscendo un punto A ed una retta r

1. Fascio di piani di sostegno r:
2. Nell’equazione sostituisco nelle parentesi le equazioni cartesiane della retta 🡪 in questo modo ora la retta appartiene al piano
3. Impongo che anche il punto A appartenga al piano, quindi sostituisco le coordinate del punto con i valori di in entrambe le equazioni e ricavo (ad uno dei due dovrò attribuire un valore comodo casuale che voglio io)
4. Riscrivo l’equazione con calcolati come nel punto 2

* Avendo due rette complanari
* Posso fare la stessa cosa di quando conosco un punto ed una retta, vedi sopra rette complanari

Punto di intersezione retta-piano: Prendo il punto generico della retta e lo sostituisco nell’equazione del piano

così trovo e sostituendolo in trovo il punto di intersezione

Posizione reciproca di due piani: Dati due piani: ed i loro rispettivi vettori normali:

I piani sono:

* + - * + Paralleli: se sono proporzionali
        + Incidenti: altrimenti (l’intersezione è una retta)

Ortogonali: se 🡪 se sono ortogonali ovviamente sono incidenti

Posizione reciproca retta-piano: Sia data una retta ed un piano , essi sono:

* Paralleli: se e sono ortogonali (vale anche viceversa)

Perché è ortogonale al piano

* Incidenti: se hanno un punto in comune

Basta prendere l’equazione cartesiana del piano e facendo passare il piano per il punto generico della retta si risolve per

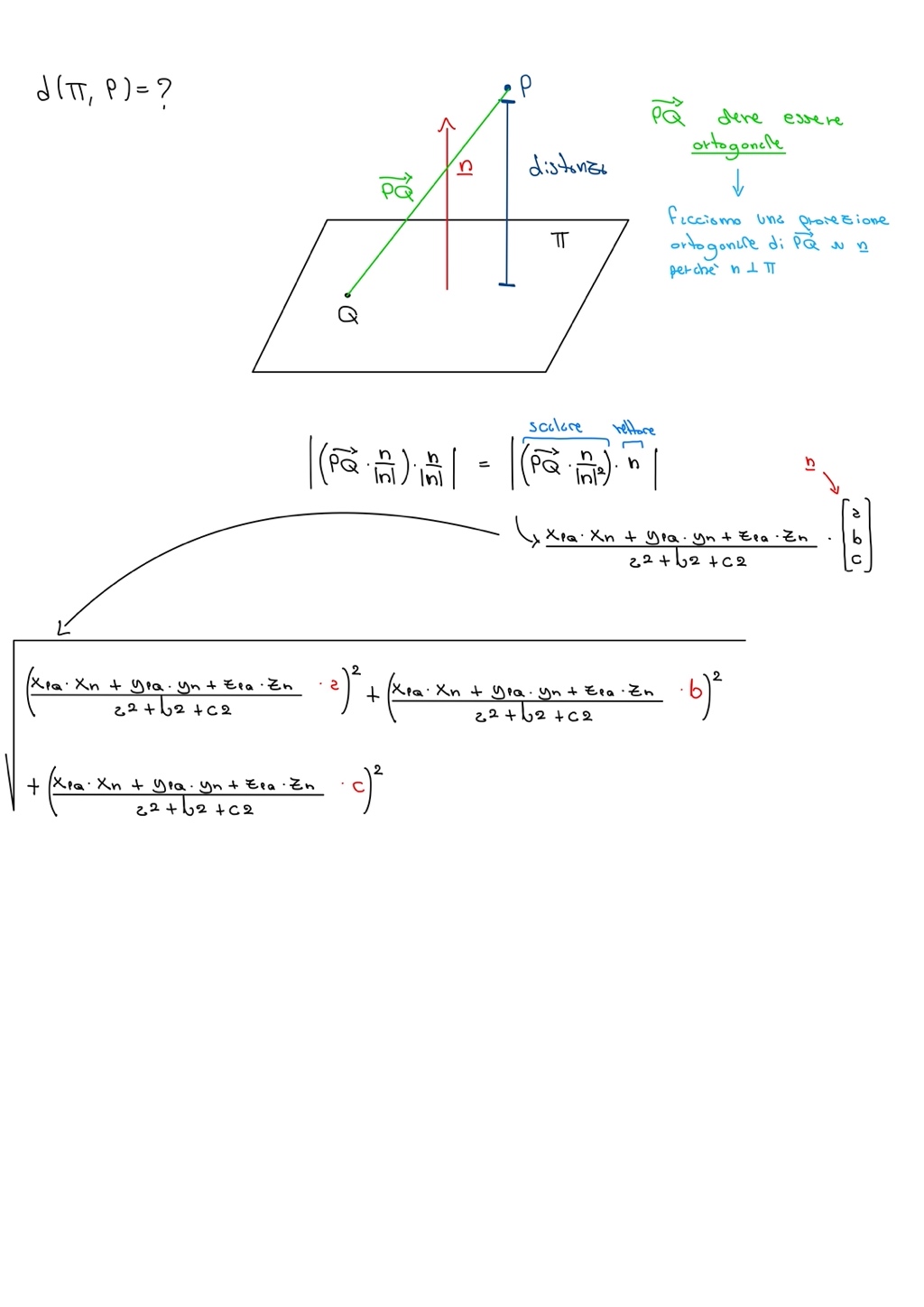
Ortogonali: se

Trovare e passante per :

1. Siccome (ortogonale), allora perché
2. Ricaviamo l’equazione parametrica di : sarà dato da ed imponiamo che passi per scrivendolo al posto di

Distanza punto-piano = retta-piano = piano-piano:

1. Determino il punto di arrivo P e scelgo un punto casuale sul piano che chiamo Q
2. Calcolo il vettore e siccome la distanza è rappresentata dalla distanza minima devo rendere ortogonale a
3. Siccome è ortogonale al piano, mi basta fare una proiezione ortogonale di su
   1. Nel calcolo della proiezione ortogonale va normalizzato perché in questo modo diventa come una direzione di un asse e perciò viene proiettata solo la lunghezza della componente di , altrimenti otterremmo anche la lunghezza di ma a noi serve solo la distanza da P al piano 🡪 praticamente come versore viene allungato fino a raggiungere P
4. Dopo otterremo il vettore blu che rappresenta la distanza come in figura e perciò basterà calcolare il suo modulo per ottenere la distanza come scalare



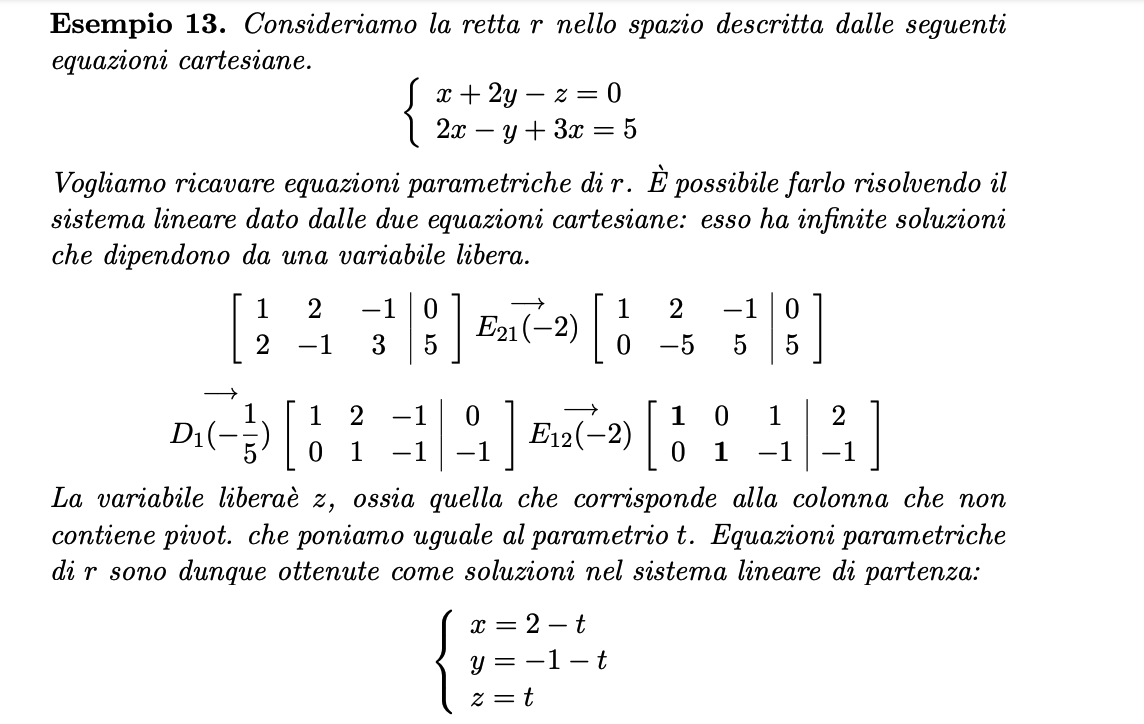
Distanza punto-piano = retta-piano = piano-piano FORMULA: Sia un punto e sia il piano di equazione

* Allora

Osservazione distanza retta piano: Siccome il piano occupa l’intero spazio e la retta è ortogonale al piano, essi saranno per forza incidenti, quindi siccome la distanza è data dalla distanza minima io devo trovare il punto di incidenza che chiameremo H sostituendo il valore dell’equazione parametrica della retta in x,y,z del piano e calcolare la distanza da questi due punti, con la formula per la distanza tra i punti siccome i punti H e il punto sul piano A saranno complanari

Ottenere l’equazione parametrica dall’equazione cartesiana:

1. Passo dall’equazione cartesiana alla matrice associata
2. Riduco a scalini la matrice e vedo quali sono le colonne pivot e non pivot, quelle non pivot saranno le variabili libere che potrò associare ad un parametro
3. Applico la riduzione all’indietro per trovare le soluzioni del sistema e poi nel sistema scrivo la variabile libera uguale al parametro e le altre due equazioni le riscrivo uguali con il valore della variabile libera nelle equazioni uguale a t,s… in base a quante variabili libere ho
   * 1. Per le rette è sempre solo 1 variabile libera
     2. Per i piani invece sono sempre 2 variabili libere

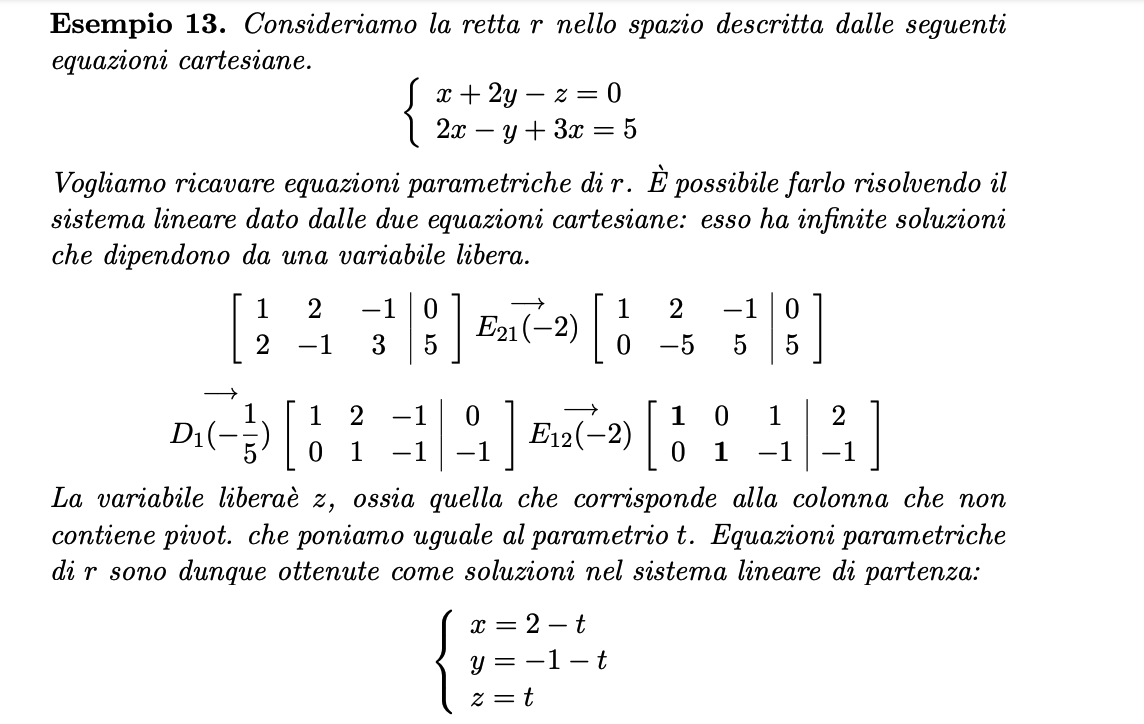


**Sistemi Lineari**

1. Le operazioni elementari su un sistema lineare sono:
   1. : Scambiare due righe
   2. : Moltiplicare tutti i coefficienti della riga per con
   3. : Sommare alla riga la riga moltiplicata per uno scalare con
2. Una matrice A si dice a scalini se:
   1. Eventuali righe nulle sono le ultime righe della matrice (in basso)
   2. Per ogni riga non nulla (riga successiva) il primo elemento non nullo si trova più a destra rispetto al primo elemento non nullo della riga

Una matrice A si dice a scalini ridotta per righe ( se:

1. Eventuali righe nulle sono le ultime righe della matrice (in basso)
2. Per ogni riga non nulla (riga successiva) il primo elemento non nullo si trova più a destra rispetto al primo elemento non nullo della riga però a differenza con la matrice a scalini questo elemento deve essere uguale a 1 e tutti gli altri elementi della riga devono essere uguali a 0
   1. Riassunto:
      1. E’ una matrice ridotta a scalini dove il primo elemento di ogni riga non nulla è uguale a 1 e tutti gli altri elementi della riga sono uguali a 0
      2. E’ una matrice a scalini dove tutti gli elementi sono 0 tranne sulla diagonale dove troviamo tutti 1
      3. E’ una matrice a scalini dove ogni pivot è 1 ed è l’unico elemento non nullo della propria colonna (definizione Postinghel)
3. Es: Matrice identità
4. Un Pivot è il primo elemento non nullo di una Riga non nulla di una matrice a scalini
5. Algoritmo di Gauss-Jordan:
   1. Cerchiamo la prima colonna che abbia come primo elemento un elemento non nullo e lo chiamiamo
   2. Eventualmente scambiamo le righe con l’operazione per averla come prima colonna
   3. Utilizziamo l’operazione per rendere tutti gli elementi della colonna di (tranne )
   4. Ripetiamo il procedimento escludendo la riga di , alla fine del procedimento avremo ottenuto una matrice a scalini
6. Algoritmo Riduzione per righe:
   1. Per ogni pivot eseguiamo l’operazione così il pivot diventa uguale a 1
   2. Riduciamo a zero tutti i termini sopra a della colonna di () tramite operazioni con
7. Il rango di una matrice , è uguale al numero totale di pivot di una sua forma a scalini
8. Teorema di Rouché-Capelli: Dato un sistema lineare in incognite e sia la sua matrice completa associata
   1. Il sistema è incompatibile se il sistema non ammette soluzioni
      1. Quando non ho variabili ma ho termini noti (quindi c’è un problema)
   2. Il sistema è compatibile se e solo se in questo caso il sistema ha:
      1. Un’unica soluzione se
      2. Infinite soluzioni che dipendono a variabili libere se ,
9. Questo è un esempio di un sistema non compatibile:
   1. Perché la matrice associata completa ridotta a scalini è di questa forma
10. Questo è un esempio di un sistema compatibile:
    1. Perché la matrice associata completa ridotta a scalini è di questa forma 🡪 1 soluzione
11. Per ottenere l’equazione parametrica dall’equazione cartesiana svolgo i seguenti passaggi:
    1. Passo dall’equazione cartesiana alla matrice associata
    2. Riduco a scalini la matrice e vedo quali sono le colonne pivot e non pivot, quelle non pivot saranno le variabili libere che potrò associare ad un parametro
    3. Applico la riduzione all’indietro per trovare le soluzioni del sistema e poi nel sistema scrivo la variabile libera uguale al parametro e le altre due equazioni le riscrivo uguali con il valore della variabile libera nelle equazioni uguale a t,s… in base a quante variabili libere ho
       1. Per le rette è sempre solo 1 variabile libera
       2. Per i piani invece sono sempre 2 variabili libere



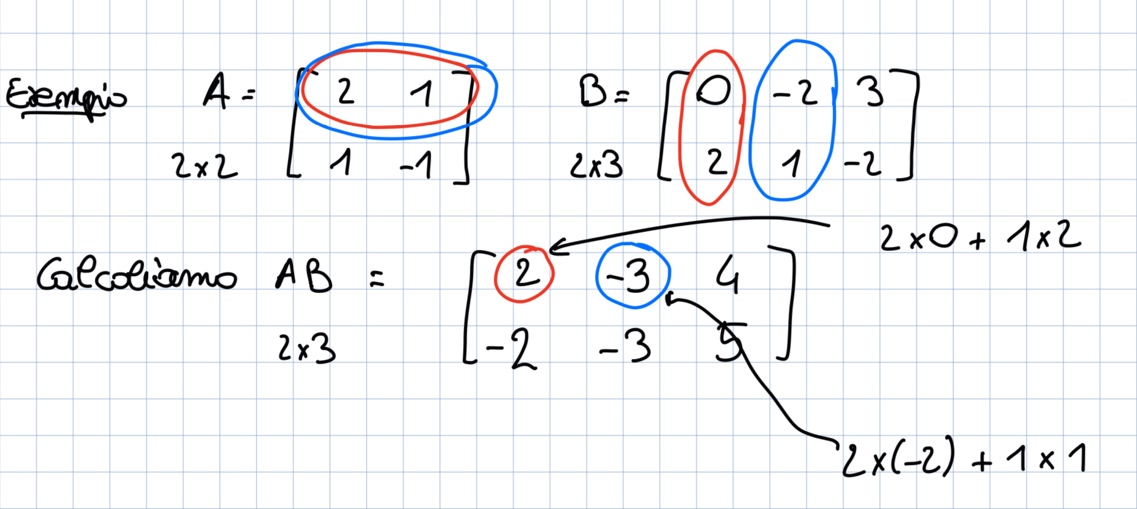
**Esercizi**

Casi da considerare per le soluzioni del sistema:

1. Se ci sono valori di k per il quale il sistema ammette infinite soluzioni ovvero
   1. In questo caso bisogna fare 2 riduzioni all’indietro o due sistemi
      1. Nel primo si considera il sistema con un’unica soluzione quindi
      2. Nel secondo si considera considerando che c’è la variabile libera quindi per esempio se la variabile libera è z da diventa nel caso in cui il valore sia
2. Altrimenti se il sistema non ammette infinite soluzioni:
   1. I due casi rappresentano un valore di k scelto in modo comodo, quindi es:
      1. è la soluzione con ancora il k
      2. è la soluzione come numeri con k in questo caso uguale a 1

Verificare se un sistema è compatibile con eventuali condizioni di esistenza: In questo caso se pongo per le condizioni di esistenza della frazione allora dico che posso fare quell’operazione perché suppongo che k sia diverso da tale valore e poi quando devo dire per quali valori di k è compatibile devo verificare ponendo se il sistema è compatibile o no riducendo a scalini la matrice originale, se è compatibile allora è compatibile per ogni valore di k altrimenti per tale valore non sarà compatibile.

**Matrici**

1. Siano due matrici, il prodotto righe per colonne tra due matrici può essere definito se , ovvero se il numero di colonne della matrice A è uguale al numero di righe di B. In questo caso diremo che A è conformabile a sinistra di B oppure che B è conformabile a destra di A (non possiamo però dire viceversa a meno che la condizione non sia rispettata anche al contrario).
   1. Se A è conformabile a sinistra di B, il prodotto è definito come:
      * 1. La matrice 🡪 C avrà il numero di colonne di B ed il numero di righe di A
        2. = n. righe e = n. colonne
      1. Dove un coefficiente generico =
         1. Es:
            1. In A rimane fissa la riga, in B rimane fissa la colonna, quindi poi di conseguenza il contatore va messo sull’indice mancante
            2. Per formare la riga di C, la riga di A deve essere moltiplicata per tutte le colonne di B ed ogni coefficiente di quella riga di C sarà dato dalla somma di: ogni elemento della riga di A moltiplicato per ogni elemento della colonna di B 🡪 elemento1xelemento1+elemento2xelemento2 ecc…
2. è invertibile se (Matrice identità)
   1. Per effettuare sia le matrici devono essere necessariamente quadrate
   2. In tal caso B è detta l’inversa di A e si denota con
   3. NB: Tutte le matrici quadrate che hanno una riga o una colonna di zeri non sono invertibili 🡪perché altrimenti una riga/colonna sarebbe di soli zeri e non si formerebbe la matrice identità dalla loro moltiplicazione

Una matrice diagonale 🡪 tutti gli elementi della diagonale non sono nulli, è sempre invertibile

Una matrice quadrata di ordine n ( ) invertibile se e solo se ha rango n, quando una matrice ha rango massimo essa non ha righe o colonne nulle perciò è sempre invertibile

1. Le matrici delle operazioni elementari si costruiscono effettuando l’operazione sulla matrice identità, la matrice ottenuta sarà la matrice dell’operazione elementare cercata.
2. Data matrice quadrata
   1. Sia la matrice trovata accostando la matrice A e la matrice identità di dimensione n anch’essa quadrata
   2. Troviamo ridotta a scalini (non è questa è anche ridotta per righe)
   3. Verifichiamo che abbia rango massimo, se ce l’ha allora la matrice è invertibile
   4. Procediamo con la riduzione all’indietro, quando otterremo uguale alla matrice identità allora l’inversa sarà data dalla matrice ottenuta che si troverà a destra di A (dove prima c’era )

Riassunto:

* Sia la matrice trovata accostando la matrice A e la matrice identità
* A è invertibile dove

Se A è invertibile allora avrà un’unica soluzione

1. L’insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è chiuso rispetto:
   1. Alla somma 🡪
   2. Al prodotto per uno scalare

L’insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo non è chiuso n’è rispetto alla somma e n’è rispetto al prodotto per uno scalare

1. Dato un sistema lineare non omogeneo il sistema omogeneo ad esso associato è (
   1. Sia una soluzione del sistema lineare non omogeneo, allora l’insieme delle soluzioni sarà della forma dove

è una soluzione del sistema omogeneo associato

Infatti e deve fare perché è soluzione allora perciò deve

per forza essere soluzione del sistema omogeneo associato.

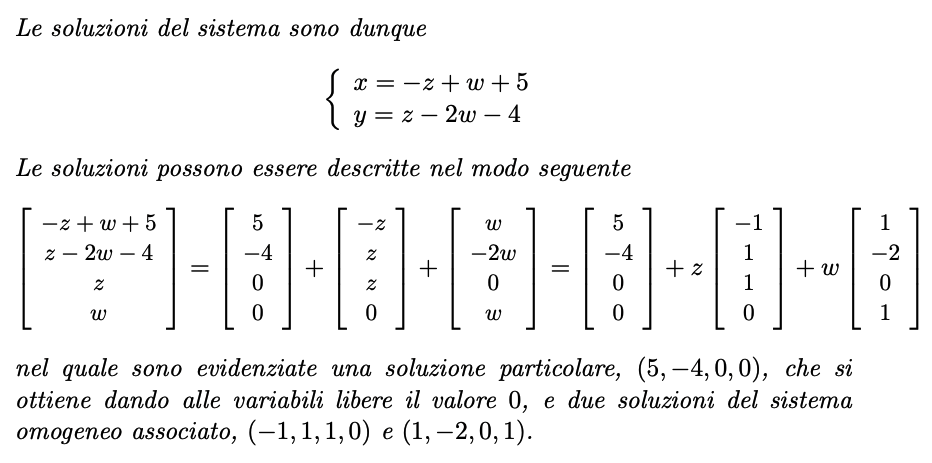
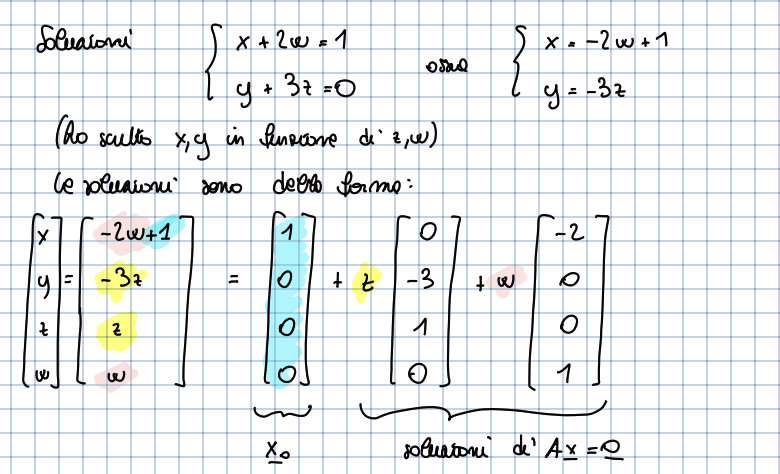
**Domande Extra**

1. Che cosa indica la scrittura ? 🡪 Indica l’insieme delle Matrici
2. Che cos’è il nucleo di A? 🡪 E’ l’insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo e si indica con
3. Che cos’è la nullità di A? 🡪 E’ il numero di colonne di non-pivot che rappresentano il numero di variabili libere e si indica con

**Esercizi**

Come trovare l’insieme delle soluzioni del sistema omogeneo:

1. Vedi screenshot fatti prima (le soluzioni vanno scritte in forma vettoriale)



**Spazi Vettoriali**

1. Un vettore geometrico è una classe di segmenti orientati, ovvero dati due punti A e B è il segmento che ha come estremo iniziale A e come estremo finale B. Esso si rappresenta con una freccia dritta che va da A a B

Siccome la matrice ha rango 1 per il teorema nullità più rango se l’Immagine ha dimensione 1 il nucleo ha dimensione 3 perché abbiamo 4 incognite

La funzione è Iniettiva se la matrice rappresentativa non ha variabili libere perché in quel caso la nullità di A sarebbe 0 e quindi lo sarebbe anche il Kernel di f e perciò conterrebbe solo il vettore nullo

2) Gli auto-vettori sono i vettori che compongono la base dello spazio delle soluzioni sostituendo le soluzioni del polinomio caratteristico nella matrice

L’auto-spazio è l’insieme degli auto-vettori

Autospazio si scrive come E(lambda) perché gli autovettori sono definiti rispetto ad un lambda specifico vedi 2), perché le soluzioni del polinomio caratteristico sono proprio gli autovalori